Correction Feuille Exercice 23

Montrer qu'on a une fonction de répartition

Exercice 7
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Déterminer $Ker(f)$ puis $Im(f)$ lorsqu'elles le sont.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 4x-6y \\ 2x-3y \end{pmatrix} \end{array}$

   On montre que f_1 est une application linéaire.

   Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda X + Y) &= \begin{pmatrix} 4(\lambda x_1 + y_1) - 6(\lambda x_2 + y_2) \\ 2(\lambda x_1 + y_1) - 3(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\lambda x_1 + 4y_1 - 6\lambda x_2 - 6y_2 \\ 2\lambda x_1 + 2y_1 - 3\lambda x_2 - 3y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(4x_1 - 6x_2) + 4y_1 - 6y_2 \\ \lambda(2x_1 - 3x_2) + 2y_1 - 3y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y_1 - 6y_2 \\ 2y_1 - 3y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_1(X) + f_1(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f_1 \text{ est une application linéaire.}}$$

   Détermination de $Ker(f_1)$: Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in Ker(f_1)$ On a donc le système

$$\begin{aligned} X \in Ker(f_1) &= f_1(X) = 0 \\ &= \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_1 &= \dfrac{3}{2}x_2 \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

   On conclut que

$$\boxed{Ker(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Détermination de $Im(f_1)$: On considère $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f_1(e_2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'après le cours,

$$Im(f_1) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

On détermine une base de $Im(f_1)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ étant une famille génératrice de f_1, il suffit de trouver une famille libre. Or, $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ceci montre que la famille est liée (en effet les vecteurs sont colinéaires). On a donc

$$\boxed{Im(f_1) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.}$$

2. $$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On montre que f_2 est une application linéaire.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_2(\lambda X + Y) &= \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) + (\lambda x_4 + y_4) \\ (\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_4 + y_4)) \\ (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + 3(\lambda x_3 + y_3) - 3(\lambda x_4 + y_4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 - \lambda x_2 - y_2 + \lambda x_3 + y_3 + \lambda x_4 + y_4 \\ \lambda x_1 + y_1 + 2\lambda x_2 + 2y_2 - \lambda x_4 - y_4) \\ \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 + 3\lambda x_3 + 3y_3 - 3\lambda x_4 - 3y_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \\ \lambda(x_1 + 2x_2 - x_4) + y_1 + 2y_2 - y_4 \\ \lambda(x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4) + y_1 + y_2 + 3y_3 - 3y_4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 - 3y_4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_2(X) + f_2(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f_2 \text{ est une application linéaire.}}$$

Détermination de $Ker(f_2)$: Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in Ker(f_2)$ On a donc le système

$$\begin{aligned}
X \in Ker(f_2) = f_2(X) = 0 \\
&= \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ \qquad 8x_3 - 8x_4 &= 0 \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_1 &= -x_4 \\ x_2 &= x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{Ker(f_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Détermination de $Im(f_2)$: On considère $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule

$$f_2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f_2(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'après le cours,

$$Im(f_2) = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

On détermine maintenant une base de $Im(f_2)$. La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $Im(f_2)$. Mais est-elle libre ?

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}$$

On reconnait le système calculé précédemment (en remplaçant les lettre x_1, x_2, x_3 et x_4 par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4). En posant par exemple $\lambda_4 = 1$ on a $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = -1$, ainsi

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$Im(f_2) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

On vérifie que cette nouvelle famille est libre. Soients $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } Im(f_2).}$$

3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$

   On montre que f_3 est une application linéaire.

   Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_3(\lambda X + Y) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \\ \lambda x_1 + y_1 + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3)) \\ \lambda x_1 + y_1 + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1+x_2+x_3) + y_1+y_2+y_3 \\ \lambda(x_1+x_2+x_3) + y_1+y_2+y_3 \\ \lambda(x_1+x_2+x_3) + y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2+y_3 \\ y_1+y_2+y_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_3(X) + f_3(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f_3 \text{ est une application linéaire.}}$$

Détermination de $Ker(f_3)$ **:** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f_3)$ On a donc le système

$$\begin{aligned} X \in Ker(f_3) &= f_3(X) = 0 \\ &= \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x &= -y-z \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{Ker(f_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Détermination de $Im(f_3)$ **:** On considère $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$f_3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_3(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_3(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le cours,

$$\boxed{Im(f_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

(Car il est clair que les vecteurs sont liés)

4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix} \end{array}$

On montre que f_4 est une application linéaire.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f_4(\lambda X + Y) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3)) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - 4(\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 - \lambda x_3 - y_3 \\ 2\lambda x_1 + 2y_1 + \lambda x_2 + y_2 - 3\lambda x_3 - 3y_3 \\ 3\lambda x_1 + 3y_1 + 2\lambda x_2 + 2y_2 - 4\lambda x_3 - 4y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + y_1 + y_2 - y_3 \\ \lambda(2x_1 + x_2 - 3x_3) + 2y_1 + y_2 - 3y_3 \\ \lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 - y_3 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f_4(X) + f_4(Y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f_4 \text{ est une application linéaire.}}$$

Détermination de $Ker(f_4)$ **:** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f_4)$ On a donc le système

$$\begin{aligned}
X \in Ker(f_4) &= f_4(X) = 0 \\
&= \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ 3x + 2y - 4z &= 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ \quad -y - z &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad -y - z &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ \quad -y - z &= 0 \\ \quad\quad 0 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x &= 2z \\ y &= -z \\ 0 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{Ker(f_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Détermination de $Im(f_4)$: On considère $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$f_4(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f_4(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f_4(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

D'après le cours,

$$Im(f_4) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$$

On détermine maintenant une base de $Im(f_4)$. La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $Im(f_4)$. Mais est-elle libre ?

Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On reconnait le système calculé précédemment (en remplaçant les lettre x, y et z par λ_1, λ_2 et λ_3). En posant par exemple $\lambda_3 = 1$ on a $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 2$, ainsi

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$Im(f_4) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

On vérifie que cette nouvelle famille est libre. Soient λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -\lambda_2 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } Im(f_4).}$$

Exercice 8
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère l'application Φ définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

1. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda X + Y) &= A(\lambda X + Y) \\ &= \lambda AX + AY \\ &= \lambda \Phi(X) + \Phi(Y) \end{aligned}$$

   Donc,

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est linéaire.}}$$

2. Dans un premier temps, on suppose que $Ker(\Phi) = \{0\}$.
   On résout le système

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Longrightarrow \Phi(X) = 0 \\ &\Longrightarrow X \in Ker(\Phi) \\ &\Longrightarrow X = 0 \\ &\Longrightarrow \text{Le système est de Cramer} \\ &\Longrightarrow \text{La matrice } A \text{ est inversible} \end{aligned}$$

   On a montré que $Ker(\Phi) = \{0\} \Longrightarrow A$ est inversible.

   On suppose maintenant que A est inversible. Soit $X \in Ker(\Phi)$. On a alors

$$\begin{aligned} \Phi(X) = 0 &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 \\ &\Longrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

   Donc $Ker(\Phi) = \{0\} \Longleftarrow A$ est inversible. Finalement,

$$\boxed{Ker(\Phi) = \{0\} \Longleftrightarrow A \text{ est inversible.}}$$